Сергеева Надежда Викторовна.

Литература:  
 1. Смирнов А.К. : Вероятностные методы анализа. Теория вероятностей.

2. Бородков А.А. : Теория вероятностей.

3. Гнеденко Б.В. : Курс теории вероятностей.

4. Александров Е.Л. : Сборник задач по теории вероятности с методическими указаниями.

5. Изромлевич В.Л. : Сборник задач по тв и мс.

6. Гмурман В.Е. : Руководство к решению задач по тв и мс.

# Предмет изучения ТВ и соотношений.

Эксперимент называется случайным, если условие/комплекс условий не однозначно определяется исход данного эксперимента. Определенным классом эксперимента относительно которых существует возможность их очередного повторения. Именно такой класс экспериментов является предметом результата теории вероятности.

Результат/исход случайного эксперимента будем называть событием.

Будем выделять 2 класса событий:

1. Достоверное Ω - всегда происходит.

2. Невозможное Ø - никогда не происходит.

Ω - пространство всех исходов случайных экспериментов.

- элемент исходов случайного эксперимента.

1 куб: = { выпало i очков } i =

Ω = { , . . . , }

Помимо элементарных, есть составные\сложные события - состоят из нескольких элементов.

А = { выпало четное количество очков } = { , , }

2 куба: Ω = { (, ) } i, j =

= { сумма равна 11 } = { (, ), (, )}

Ω = { } i =

# Урновая модель.

10 шаров - 3 красных + 7 белых

Ω = { комбинация пар шаров } n = 10 \* 9 = 90 с учетом порядка. n’ = = 45 без учета порядка. m = 7 \* 3 = 21.

# Соотношения между случайными событиями.

Если рассматривать события как подмножества:

Ω = { 0, 10, 110, . . . }

1. Говорят, что событие А влечет собой событие В, если осуществление события А влечет за собой всякий раз событие В. .

2. Событие А эквивалентно событию В, если они влекут события друг друга. А = В А В и В А

3. Событие С называют объединением\суммой событий А и В, если оно эквивалентно осуществлению хотя бы одного из событий А или В.

4. Событие С называется пересечением или произведением событий А и В, если оно эквивалентно их одновременного наступления А и В.

5. Противоположное событие - происходит тогда, когда А не происходит = Ω \ А.

А = Ω

А =

А и В называются несовместными, если А ∩ В =

6. Говорят, что , . . . , , . . . образуют полную группу попарно несовместных событий, если их объединение достоверны, а попарные пересечения невозможны. = ∀i ≠ j, = Ω.

# Статистическое обоснование вероятности.

Для анализа пространства всевозможных исходов случайных эксперимента каждому событию А необходимо поставить в соответствие некоторое число, которое характеризовало бы возможность появления случайного события ( найти вероятность ).

n(А) - количество экспериментов, в которых произошло событие А. Отношение называется относительной частотой.

= 0, , = 1.

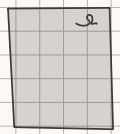
Если провести N экспериментов по n экспериментов, то получим серию частот свойство устойчивости.

# Классическое определение вероятности.

P(Ø) = 0, , P() = 1 - вероятность доли достоверности, содержащие случайность в достоверном событии.

= n - равновозможность элементарных исходов. Тогда вероятность для каждого исхода должна быть одинаковой. = р. Тогда сумма всех вероятностей равна 1. = n \* p p = .

# Аксиоматическая схема абстрактных событий.

В основе лежат элементы событий. Они призваны моделировать исходы реального эксперимента. Но в данном случае эксперимент не требуется. Под пространством элементарных событий будем понимать любое абстрактное множество , а элементы - . Любое событие А будем рассматривать подмножеством множества . Эксперимент Е - бросание точки на некоторый квадрат . 

( x, y ) - в качестве исхода эксперимента - достаточное событие, а просто элемент исхода - точка с координатами ( пара чисел ). В качестве случайного эксперимента рассматриваем измерение физической величины в классической схеме элемент события Х = х.

В аксиоматической схеме, описывающей реальный эксперимент измерения элемент события отождествляется с точками х числовой прямой, а сложные или составные события А с точечными множествами числовой прямой. Тогда вся числовая прямая - - пространство всех элементарных исходов. Невозможное событие - Ø ( пустое множество ). Несовместные события - непересекающиеся множества.

Алгеброй ( полем ) будем называть множество F, которое удовлетворяет 3-м требованиям.

1. ( )

2. Множество замкнуто относительно операций дополнения: ⇒

3. Множество замкнуто относительно операций пересечения или объединения ⇒ ( )

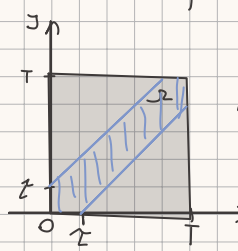
- непрерывное множество ⇒ сигма-алгебра ( -алгебра )

G = { герб }, = { решка }, = { G, }, F = { Ø, , G, }

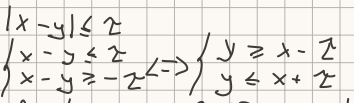
# Геометрическое определение вероятности

Геометрическое определение вероятности - распространение идеи классической схемы, основанной на на равновозможных исходах с дискретного на непрерывный случай.

Рассмотрим эксперимент Е, в котором случайная точка М бросается на некоторой области D, при этом равновозможно ее попадание в любую подобласть d области D, как бы эта подобласть не перемещалась в области D. Тогда вероятность того, что точка М попадет в область d, равна отношению мер этих областей , , .

Задача о встрече 2 человек, оговоренной в промежутке времени [ 0, T ]. 1-ый ждет время , а затем уходит, если не дождался. Найти вероятность встречи. x, y - время прихода 1-ого и 2-ого лица. 0 x T, 0 y T.

| x - y |



A = { встреча состоялась }

P(A) = =

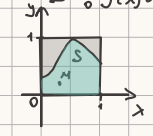
# Метод статистических испытаний или метод Монте-Карло.

Сопоставление вероятностей, найденных на основе практики и статистики определяет, во-первых, убрать в их практике совпадения и, во-вторых, позволяет статистическими методами находить величины неслучайного характера. Такой метод называется метод статистических испытаний или метод Монте-Карло.

Пример: вычисление определенного интеграла I = , непрерывный.

. Рассмотрим отношение, пронормируем интеграл. .

Рассмотрим

x, y - равновозможные распределения из [ 0, 1 ]

- точка попала в S.

Проводим эксперимент N раз и считаем сколько раз точка попала в область S.

n(A) - число экспериментов, в которых событие А произошло - значение интеграла.

# Аксиоматическое определение вероятности.

Аксиоматическое определение вероятности - является более общим определением и строится на основе свойств вероятности, которые принимаются как аксиомы. Пусть - пространство элементарных исходов случайного эксперимента, F - -алгебры его подмножеств множества . Тогда вероятностью или вероятностной мерой будем называть вещественную функцию P(A), определенной для каждого события -алгебры F и удовлетворяющей аксиомам:

1.

2. Для каждого счетного набора попарно несовместных событий , . . . вероятность суммы ( объединения ) равна сумме вероятностей.

3. F →

1. Отсюда следует, что P(Ø) = 0, , P() = P() + P() = 1

2. P() = 1 - P(A), A + = , P(A + ) = P(A) + P() = 1

3. 0 P(A) 1, P(A) = 1 - P()

Замечание. Аксиоматическое определение вероятности не дает способы построения вероятности события. Оно не является конструктивным. Классическое и геометрическое определения вероятности являются конструктивными, так как они определяют понятие вероятности и дают способы вычисления вероятности. Однако, аксиоматическое определение допускает ведение различных конструкций, удовлетворяющих аксиомам.

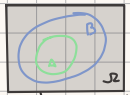
# Интегральная конструкция.

Пусть х - случайная точка, D - фиксированное множество на числовой прямой и тогда P(xD) = , где f(x) - произвольно выбранная неотрицательная функция, удовлетворяющая условию нормировке.

Вероятностное пространство - это тройка { , F, P }

# Свойства вероятностей.

1. P(Ø) = 0, 0 P(A) 1, P() = 1

2. Монотонность: 

~ n

A ~ m

B ~ k

m k, , P(A) P(B)

3. Теорема сложения: , P() = P(A) + P(B)

~ m + k, P() = = P(A) + P(B)

4. 

~ n, A ~ m, B ~ k, ~ z, ~ m + k - z, P() = = = P(A) + P(B) - P(

= = = = , P() = P(A) + P()

B = B \* = B(A + ) = BA + B

P(B) = P(BA) + P(B)

P(B) = P(B) - P(AB) ⇒ P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)

5. P() = 1 - P(A)

6. P( A | B ) = , , B = { }, P(B) = , = B, , P( A | B ) =

7. Теорема произведения: P( ) = P( A ) P( B | A ) и P( B ) P( A | B )

P( ) = P( )P( | ) \* . . . \* P( )P( | )

# Условная вероятность

Независимость случайных событий.

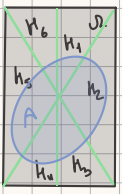
1 кубик: , A = { }, P(A) = ⅙ - безусловная вероятность. B = P( A | B ) = ( A ) = ⅓ - условная вероятность, = B.

События А и В называются независимыми, если вероятность одного из них не зависит от осуществления или неосуществления другого, то есть Р( A | B ) = P( A ) и P( B | A ) = P( B ). Если А и В независимы, то вероятность произведения событий равна произведению вероятностей P( ) = P( A )P( B )

Система событий называется попарно независимой, если P( ) = P( )P( ).

Система событий называется попарно независимой, если P( ) =

# Формула полной вероятности.

Пусть , . . . , - полная группа попарно несовместных событий , = . Тогда P( A ) = )P( A | ), ) = 1

A = A = A ( ) =

P( A ) = P( = ) = )P( A | )

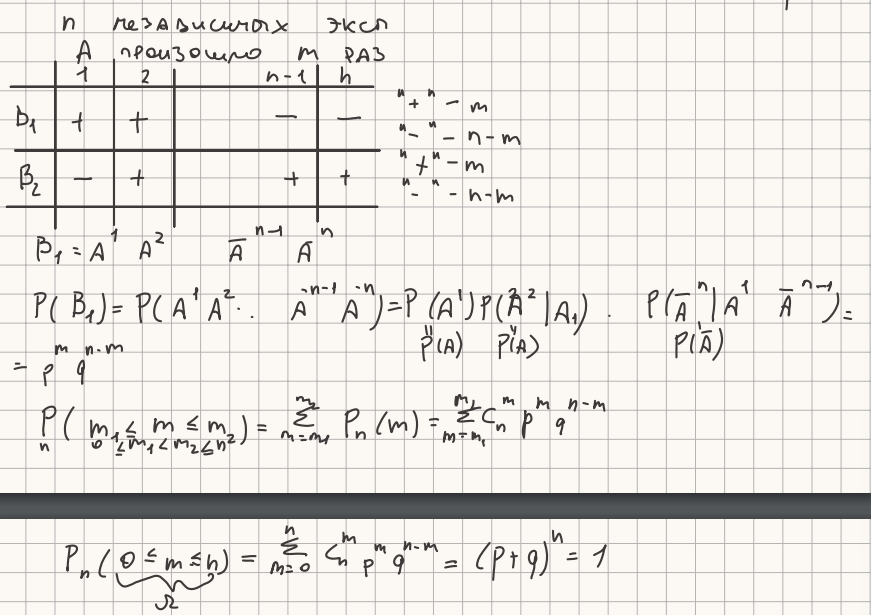
- гипотеза/предположение относительно исходов эксперимента

# Формула Байеса.

# Последовательность независимых экспериментов. Формула Бернулли.

Пусть в результате проведения некоторого эксперимента возможны l исходов . Осуществим эксперимент n раз i-ый исход k-ого эксперимент назовем последовательность экспериментов назовем последовательностью независимых экспериментов, если вероятность i-ого исхода k-ого эксперимента не зависит от номера эксперимента и результатов предыдущего эксперимента, зависит только от номера.

Последовательность независимых экспериментов с двумя исходами называется схемой Бернулли , p = P( A ), q = P( ) = 1 - p.



# Случайные величины.

- вероятностное пространство. Функция определенная на пространстве элементарных исходов и принимает значение на числовой прямой R называется случайной величиной, если , где B - баршевская сигма-алгебра. Если на числовой прямой рассматривать промежутки [ a, b ], [ a, b ), ( a, b ], ( a, b ) , то наименьшая -алгебра, содержащая все эти промежутки называется Борелевской -алгеброй. Аналогично определяется -алгебра в ( n-мерной ).

{ } F

Случайная величина определяется функцией распределения.

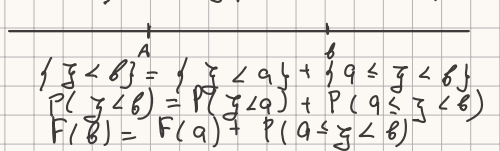
# Функция распределения.

Функция распределения называется такая определенная на всей числовой прямой функция F( x ), которая для каждого x = вероятности события { < x } F( x ) = P( < x ) . Функция является полной характеристикой случайной величины.

Свойства функции распределения:

1. 0 F( x ) 1

2. Неубывающая a b F( a ) F( b )



3. P( ) = F( b ) - F( a )

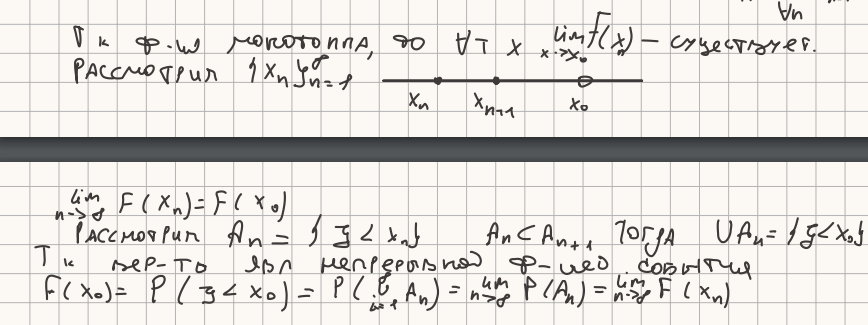
4. Функция непрерывна слева: = F( )

Аксиома непрерывности - вероятность есть непрерывная функция событий, то есть для любой монотонной последовательности событий справедливо соотношение ) = P( )

Последовательность событий будем называть монотонной, если:

1. = ,

2. = ,

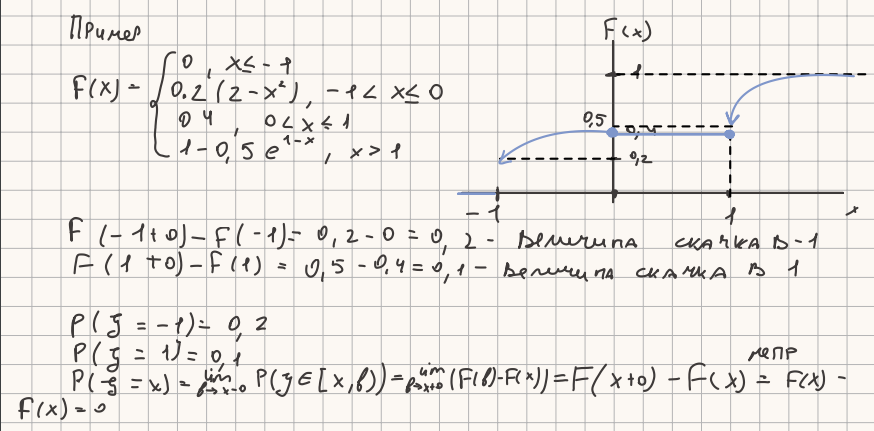


5. F( + ) = = 1

6. F( - ) = = 0

= 1, где = { }

= = , P( ) = P( ) = 1

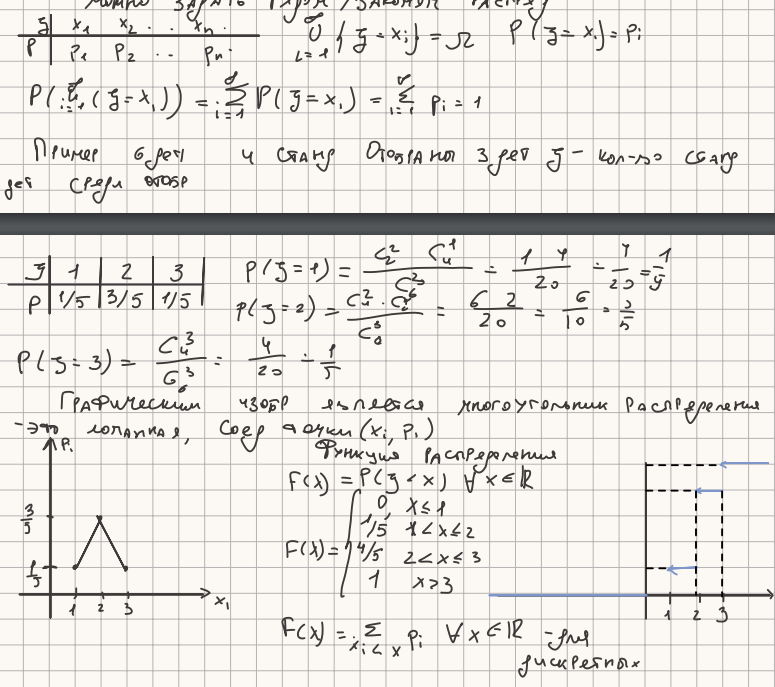


Случайная величина принимает значение P( ) = F( + 0 ) - F( ), если в этой точке функция непрерывна, вероятность равна 0, если в этой точке имеется разрыв первого рода, равна величине скачка.

P( ) = = = F( ) - F( )

# Дискретная случайная величина.

Можно задать рядом/законом распределения.



# Абсолютно непрерывная случайная величина

Случайная величина называется абсолютно непрерывной, если существует неотрицательная, интегрируемая на числовой прямой функция f(x) - плотность распределения вероятностей, такая что , причем

Свойства:

1. f( x ) 0

2. Интегрируемая

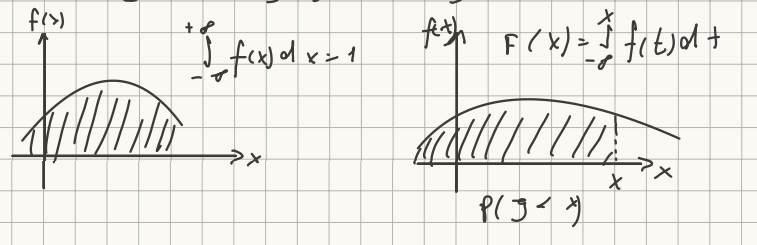
3. F’( x ) = f( x )

4. - абсолютно непрерывная случайная величина P( ) = P( ) = P( ) = P( ) = = F( b ) - F( a )

P( ) = F( b ) - F( a )

{ } = { } + { }

P( ) = P( ) + P( )



# Числовые характеристики случайных чисел

Характеристики, которые задаются в виде числа.

1. Математическое ожидание

Пусть дискретная случайная величина задается рядом/законом распределения ( 1 ), а абсолютная случайная величина задается плотностью распределения f( x )

|  |  |  | . . . |  | . . . |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| P |  |  | . . . |  | . . . |

( 1 )

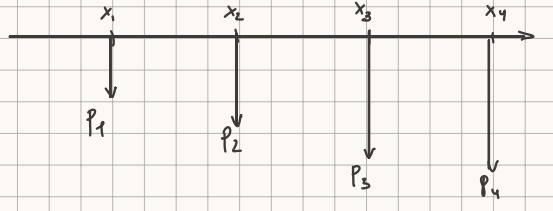
Математическим ожиданием или средним значением случайной величины называется число

|  | дискретная случайная величина ( 2 ) |  |
| --- | --- | --- |
|  | непрерывная случайная величина ( 3 ) |  |

=

При этом предполагается, что ряд ( 2 ) и интеграл ( 3 ) абсолютно сходятся, в противном случае говорят, что математического ожидания нет.

Математическое ожидание - характеристика положения случайной величины на числовой прямой.



Свойства:

1. Математическое ожидание располагается между минимальным и максимальным значением ( дискретная случайная величина )

2. Математическое ожидание константы равно константе. M( c ) = c, c = const

Доказательство для дискретной случайной величины:

Константу можно рассмотреть как дискретную случайную величину, которая принимает одно значение = M( c ) = c \* 1 = c.

3. M( c \* ) = c \* M( ), c = const.

Доказательство: Пусть - дискретная случайная величина, которая задана рядом распределения ( 1 ) и имеет мат. ожидание . Рассмотрим случайную величину

|  |  |  | . . . |  | . . . |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| P |  |  | . . . |  | . . . |

( 1 ) P( ) = P( ) =

M( c \* ) = = = = c \*

и одновременно сходятся или расходятся

4. M( + c ) = + c, c = const. .

|  | + c | + c | . . . | + c | . . . |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| P |  |  | . . . |  | . . . |

M( + c ) = = = + c \* = + c.

5. M( + ) = +

# Дисперсия

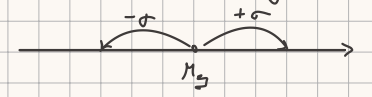
Дисперсией случайной величины называется мат. ожидание квадрата отклонения случайной величины от своего мат.ожидания.

=

= - - центрированное = M( - ) = \*

Дисперсия является характеристикой рассеивания или разброса значений случайной величины вокруг мат. ожидания.

- среднее квадратическое отклонение.



Свойства:

1. Дисперсия константы равна 0. D( c ) = 0, c = const.

M( c ) = c, = M c - M( c ) = 0

2. D( c \* ) = \* , c = const.

D( c \* ) = M c \* - M( c \* ) = M c \* - c \* ) = \* M( - ) = \*

3. D( c \* ) = \* , c = const

D( c \* ) = M c + - M( c + ) - M c + - c \* = M - =

4. = -

|  | дискретная случайная величина ( 4 ) |
| --- | --- |
|  | непрерывная случайная величина ( 5 ) |

=

( 4 ) - ( 5 ) должны сходиться, иначе дисперсия отсутствует.

= M = = =

|  | дискретная случайная величина ( 6 ) должна сходиться |
| --- | --- |
|  | непрерывная случайная величина ( 7 )  должен сходиться |

5. =

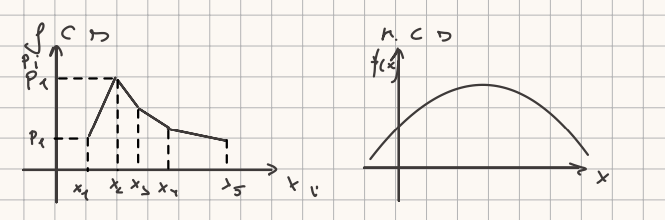
# Мода

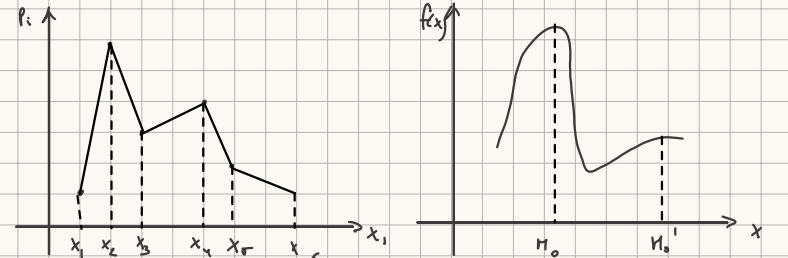
Модой дискретной случайной величины называется наиболее вероятное ее значение по сравнению с соседними.

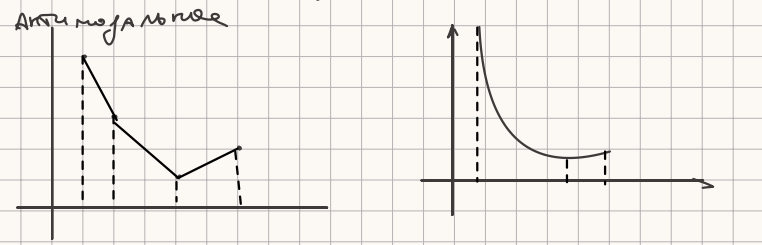
,

Модой для непрерывной случайной величины называют точку локального максимума функции плотности распределения.

1 мода - унимодальная, > 1 - полимодальная, моды может не быть вообще.

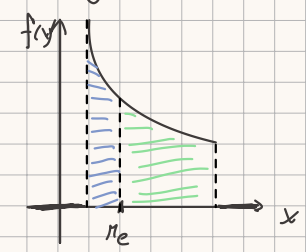






# Медиана ( для непрерывной случайной величины )

Медианой непрерывной случайной величины называется такая точка, на которой справедливо равенство



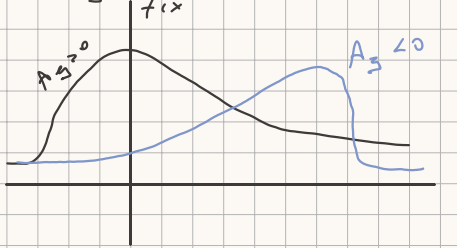
Медиана находится из условия .

Начальным моментом k-ого порядка или k-ым начальным моментом называется число, определяемое равенством:

|  | дискретная случайная величина |
| --- | --- |
|  | непрерывная случайная величина |

=

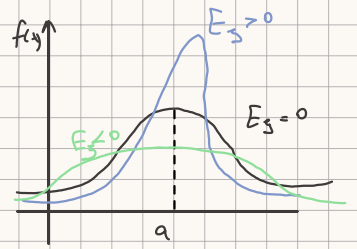
- коэффициент асимметрии - отношение третьего центрального момента к среднему квадрату отклонения третьего порядка.



# Эксцесс

- отношение четвертого центрального момента к среднему квадрату отклонения четвертой степени.

Функция плотности распределения Гаусс или нормальный закон.



# Биномиальный закон распределения

Пусть n независимых элементов с двумя исходами ( ), P( A ) = p, q = 1 - p, ~ Bin( n, p ), n N, 0 < p < 1. 0, 1, . . . , n. P( = m ) = ,

|  | 0 | 1 | 2 | . . . | n |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| P |  |  |  | . . . |  |

= . . . =

# Распределение Пуассона

- распределение по закону Пуассона, если ее значение все неотрицательные целые числа.

# Геометрическое распределение

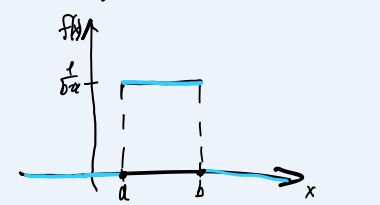
- геометрическое распределение с параметром p, если она принимает значение 1, 2, . . .

P( 0 < p < 1 ); 1, 2, . . . P( = m ) = , q = 1 - p

|  | 1 | 2 | . . . | m | . . . |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| P | p | pq | . . . |  | . . . |

# Равномерный закон распределения

- равномерный закон распределения с параметрами a, b если:

~ U( a, b ); a b; a, b R

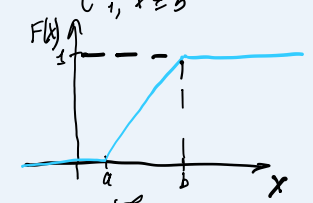
|  |  |
| --- | --- |
| 0 |  |

f( x ) =

1.

2.

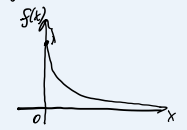
3.



| 0, |  |
| --- | --- |
| , |  |
| 1, |  |

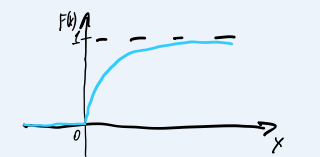
F( x ) =

# Показательный ( экспоненциальный )

~ E( ), > 0

| , |  |
| --- | --- |
| 0, | x < 0 |

f( x ) =



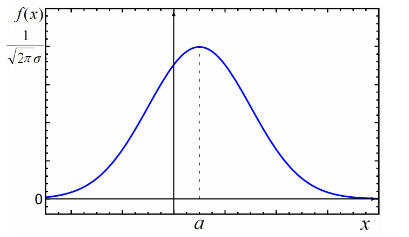
| 0, | x < 0 |
| --- | --- |
|  |  |

f( x ) =

# Нормальный закон распределения ( Гауссовский )

Распределение случайной величины называется нормальным ( гауссовским ) N( ) с параметрами , ( ) и , ( ), если плотность распределения имеет вид:

.



# Стандартная случайная величина

Случайная величина , распределенная по нормальному закону N( 0, 1 ) с параметрами a = 0 и = 1 называется стандартной случайной величиной.

Функция распределения стандартной нормальной случайной величины имеет вид

где - функция Лапласа.

# Свойства функции Лапласа:

1.

2.

3. Пусть случайная величина имеет нормальный закон распределения N( ) с параметрами и , тогда

.

.

# Двумерные случайные векторы/величины

Двумерным случайным вектором называется упорядоченная пара ( ξ, η ) одномерных случайных величин при условии, что определена вероятность P( ξ < x, η < y ) P( ξ < x, η < y ) совместного появления событий { ξ < x } и { η < y }.

Двумерный случайный вектор называется также двумерной случайной величиной.

Функцией распределения двумерного случайного вектора ( ξ, η ) называется вероятность совместного появления событий { ξ < x } и { η < y } ∀x, y ∈ R.

F( x, y )=P( ξ < x, η < y ).

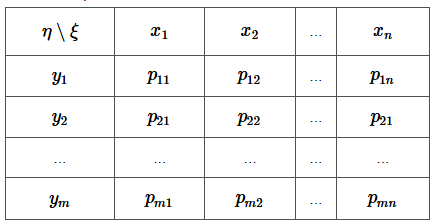
Двумерной функцией распределения называется вероятность совместного появления событий

Так же как и в случае одномерных случайных величин различают дискретные и непрерывные случайные векторы.

Двумерный случайный вектор ( ξ, η ) называется дискретным, если множество его значений ( x, y ) конечно или счетно.

Пример: количество занятых номеров в двух автоматических телефонных станциях города в один и тот же момент времени.

Дискретный двумерный случайный вектор ( ξ, η ) можно задать с помощью закона распределения



Где

,

# Непрерывный случайный вектор

Двумерный случайный вектор ( ) будем называть непрерывным, если его значения заполняют всю плоскость xOy и существует неотрицательная функция называется плотностью распределения, такая что вероятность попадания случайного вектора в область D это

# Свойства функции распределения:

1.

2.

3.

4.